Invariants Spectraux du Modèle Noétique

Patrice Portemann

Introduction

Nous examinons deux invariants fondamentaux associés à chaque fenêtre spectrale Ω_i du modèle noétique :

1. l'indice de Fredholm de l'opérateur de Dirac restreint D_{Ω_i} ;
2. le couplage cyclique d'une classe cocyclique à la classe de K-homologie $[D_A]$.

1 Invariant 1 : Indice de Fredholm

Définition

On projette l'opérateur de Dirac étendu D_A sur la strate Ω_i à l'aide de la projection spectrale Π_{Ω_i}. L'opérateur restreint D_{Ω_i} se présente en structure chirale :

$$D_{\Omega_i} = \begin{pmatrix} 0 & T_i^* \\ T_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sur} \quad \mathcal{H}_i^+ \oplus \mathcal{H}_i^-.$$

L'indice de Fredholm se définit alors par

$$\mathrm{Index}(D_{\Omega_i}) = \dim\ker(T_i) \; - \; \dim\ker(T_i^*),$$

un entier invariant sous déformation continue de D_A.

Exemple : Monopole de Dirac sur S^2

Considérons le fibré de Hopf $L^k \to S^2$ de degré k. Le Dirac-twisteur agit comme

$$T_i : \Gamma\big(S^2, S^+ \otimes L^k\big) \longrightarrow \Gamma\big(S^2, S^- \otimes L^k\big).$$

Le théorème d'Atiyah–Singer donne directement

$$\mathrm{Index}(D_{S^2,k}) = k.$$

Ainsi, pour la strate noétique modélisée par (S^2, L^k),

$$\mathrm{Index}(D_{\Omega_i}) = k,$$

mesurant le nombre entier d'états zéro chiraux, interprétés comme « koïlons » topologiques.

2 Invariant 2 : Appariement Cyclique

Définition

Dans la géométrie non commutative, une classe cocyclique τ_{2n} est un co-cycle de Connes–Chern capturant un invariant topologique de degré $2n$. Le couplage à la classe de K-homologie $[D_A]$ s'écrit

$$\big\langle \tau_{2n},\, [D_A] \big\rangle = \mathrm{Tr}_\omega\big(\gamma\, a_0\, [D_A, a_1] \cdots [D_A, a_{2n}]\, |D_A|^{-2n}\big),$$

où Tr_ω est la trace de Dixmier, γ la chirale, et $a_j \in \mathcal{A}$.

Exemple : Fibré $U(1)$ sur le tore T^2

Pour l'algèbre $\mathcal{A} = C^\infty(T^2)$ et une connexion de flux $m \in \mathbb{Z}$, la classe cocyclique

$$\tau_2(a_0, a_1, a_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T^2} a_0\, da_1 \wedge da_2$$

associe via le couplage

$$\big\langle \tau_2,\, [D_A] \big\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{T^2} F = m,$$

où $F = dA$ est la courbure. Ce résultat coïncide avec l'indice de Fredholm sur T^2.

Synthèse

- L'indice de Fredholm fournit un entier topologique chirale, comptant les modes zéro du Dirac restreint.
- Le couplage cyclique rend le même entier via une formule trace sur la classe de K-homologie.

Ces deux approches concordantes garantissent la quantification et la stabilité des invariants spectraux des strates du vide noétique.