

Démonstration formelle du modèle noétique avec équations spectrales et encart sur $A(x)$

Patrice Portemann

Introduction

Nous présentons ici le formalisme noétique sous la forme d'une démonstration mathématique. Chaque étape est illustrée par des équations clefs reposant sur la géométrie non commutative et l'action spectrale de Connes–Chamseddine.

1 1. Triplet spectral non commutatif

On définit le triplet spectral

$$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$$

où :

- $\mathcal{A}$ est une algèbre non commutative d'opérateurs bornés,
- $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de représentation,
- D un opérateur de Dirac auto-adjoint à spectre discret.

La métrique non commutative se lit dans la commutateur

$$d(a, b) = \sup_{\|[D, f]\| \leq 1} \|f(a) - f(b)\|.$$

Encart : Présence explicite du champ noétique $A(x)$

Le champ noétique $A(x)$ se couple via l'opérateur de Dirac étendu :

$$D_A = D + \gamma^\mu A_\mu(x),$$

où $A_\mu(x)$ est la 1-forme de connexion dans $\mathcal{A}$. Pour faire apparaître la dynamique de A , on développe :

$$D_A^2 = D^2 + \{\gamma^\mu \partial_\mu, \gamma^\nu A_\nu\} + \gamma^\mu \gamma^\nu A_\mu A_\nu.$$

On y reconnaît le tenseur de courbure

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],$$

dont le terme quadratique $\frac{1}{2} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$ émerge dans le coefficient $a_4(D_A^2)$ de l'expansion de Seeley–DeWitt, correspondant à l'action de Yang–Mills du champ $A(x)$.

2. Spectral action unifiée

L'action noétique se formule comme

$$S = (f(D_A/\Lambda)) + \frac{1}{2} \langle J\psi, D_A \psi \rangle,$$

avec :

$$(f(D_A/\Lambda)) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_{4-n} \Lambda^{4-n} a_n(D_A^2),$$

où $f_k = \int_0^\infty s^{\frac{k}{2}-1} f(s) ds$ et les coefficients $a_n(D_A^2)$ sont les tenseurs de Seeley–DeWitt incluant les termes de gravité, de jauge et topologiques.

3. Fenêtres spectrales et fractions d'énergie

Le vide se fragmente en bandes $\{\Omega_i\}$, chacune associée à une fraction spectrale α_i de l'énergie totale :

$$\rho_{\text{vac}} = \sum_i \alpha_i \rho_{\text{vac}}, \quad \sum_i \alpha_i = 1.$$

On identifie la fréquence centrale de la strate i par son gap :

$$\Delta\omega_i = \min\{\lambda > 0 \mid \lambda \in |D_A|_{\Omega_i}\}.$$

4. Invariants topologiques

Indice de Fredholm

Pour la projection spectrale Π_{Ω_i} ,

$$D_{\Omega_i} = \Pi_{\Omega_i} D_A \Pi_{\Omega_i},$$

l'indice s'écrit

$$(D_{\Omega_i}) = \dim \ker(D_{\Omega_i}^+) - \dim \ker(D_{\Omega_i}^-).$$

Pairing cyclique

Le couplage à une classe cocyclique τ_{2n} donne

$$\langle \tau_{2n}, [D_A] \rangle =_\omega \left(\gamma a_0 [D_A, a_1] \cdots [D_A, a_{2n}] |D_A|^{-2n} \right) \in \mathbb{Z}.$$

5 5. Dynamique de transition

Le passage spectrale entre deux fenêtres $\Omega_i \rightarrow \Omega_j$ est gouverné par l'action d'un instanton euclidien :

$$S_{\text{inst}} = \int \left(\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + V(\varphi) \right) d^4x,$$

avec probabilité

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow j} \sim e^{-S_{\text{inst}}/\hbar}.$$

Les solitons spectraux maintiennent la charge topologique via

$$E_{\text{sol}} = \int \mathcal{E}_{\text{topo}} d^3x \geq 0.$$

6 6. Implications cosmologiques

Pendant l'inflation, le cutoff spectral évolue :

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 a(t), \quad a(t) = e^{Ht},$$

ce qui gèle hors horizon les modes $\omega < H$, produisant un tilt spectral

$$n_s - 1 = -2\epsilon - \eta$$

mesurable dans le fond diffus cosmologique.

7 7. Voie expérimentale

Le modèle noétique prédit :

Gravimétrie spectrale :	$\rho_{\text{eff}}(1 \text{ Hz}) \sim \alpha_U \rho_{\text{vac}},$
Modulation Casimir :	$F(d) \propto \sum_{\omega \in \Omega_i} \omega^3 e^{-2\omega d},$
Corrélations EEG-SQUID :	$G(\omega) = \langle \Pi_{\Omega_C}(\omega) \Pi_{\Omega_H}(\omega) \rangle.$

Conclusion

Ce faisceau d'équations démontre que le champ noétique, fondé sur la géométrie non commutative et la spectral action, organise le vide en fenêtres spectrales, garanties par des invariants topologiques, et propose des tests expérimentaux pour valider ce changement de paradigme scientifique.