

Charge topologique des solitons et nombre d'enroulement avec inclusion explicite du champ noétique $A(x)$

Résumé

Nous démontrons que chaque soliton transporte une charge topologique définie par un *nombre d'enroulement* (winding number). Dans le formalisme noétique, cette charge est calculée à la fois par des intégrales topologiques, par des pairings en K-théorie/K-homologie, et par l'indice d'opérateurs de Dirac *avec* connexion noétique $A(x)$. Nous incluons explicitement D_A , son champ de courbure F et les conditions de normalisation.

1 Cadre noétique et champ de jauge

Triplet spectral et connexion noétique

Le triplet spectral est $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D_A)$ avec

$$D_A = D + \gamma^\mu A_\mu(x), \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

Ici, $A(x)$ est la 1-forme de connexion (champ noétique), et F son tenseur de courbure. Les solitons apparaissent comme configurations à énergie finie dans ce cadre, protégées par des invariants topologiques.

2 Conditions d'énergie finie et compactification

Soit une configuration de champ $\phi(x)$ (globale ou de jauge couplée à A). La finitude d'énergie impose des conditions à l'infini :

$$\phi(x) \rightarrow \phi_\infty \in \mathcal{M}, \quad \partial\phi(x) \rightarrow 0, \quad F_{\mu\nu}(x) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty.$$

Ces conditions compactifient l'espace : $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\} \simeq S^d$. La configuration définit alors une application continue

$$\Phi : S^d \longrightarrow \mathcal{M},$$

où $\mathcal{M}$ est la variété des vides (par exemple S^1 , S^2 , $SU(2)$ ou un quotient G/H).

3 Nombre d'enroulement et normalisation

Le *nombre d'enroulement* (winding) est la classe d'homotopie de Φ , $[\Phi] \in \pi_d(\mathcal{M})$, souvent $\mathbb{Z}$. Il se calcule par des intégrales normalisées pour donner un entier $Q \in \mathbb{Z}$.

Cas 1D (kink ou champ de phase)

Pour $\theta : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, on définit

$$Q_{1D} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \theta(x) dx = \frac{1}{2\pi} [\theta(+\infty) - \theta(-\infty)] \in \mathbb{Z}.$$

Annotation : La normalisation $1/(2\pi)$ garantit que un tour complet de la phase donne $Q = 1$.

Cas 2D (vortex abélien avec A)

Pour un champ complexe ϕ de norme finie couplé à un $U(1)$ avec connexion A , la charge topologique est le flux magnétique :

$$Q_{2D} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} F_{12}(x) d^2x = \frac{1}{2\pi} \oint_{|x| \rightarrow \infty} A_\ell d\ell = \frac{1}{2\pi} \oint \nabla \arg \phi \cdot d\vec{\ell} \in \mathbb{Z}.$$

Annotation : La *quantification de Dirac* fixe le quantum de flux, assurant $Q \in \mathbb{Z}$.

Cas 3D (Skyrmion $SU(2)$)

Pour $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow SU(2)$ avec $U \rightarrow \mathbf{1}$ à l'infini,

$$Q_{3D} = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} \text{Tr}(U^{-1} \partial_i U U^{-1} \partial_j U U^{-1} \partial_k U) \in \mathbb{Z}.$$

Annotation : Le coefficient $1/(24\pi^2)$ est l'unique normalisation donnant des entiers (degré de l'application $S^3 \rightarrow S^3$).

4 Formulation de jauge et champ noétique $A(x)$

Monopole et défaut de phase

Dans 3D, avec champ scalaire $\hat{\phi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2$ et connexion A , la charge de monopole est

$$Q_{\text{mono}} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty^2} d\Omega \hat{\phi} \cdot (\partial \hat{\phi} \times \partial \hat{\phi}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty^2} F.$$

Annotation : Le terme de droite identifie directement la charge au flux de $F = dA$ sur la sphère à l'infini.

Pairing cyclique et classe Chern avec A

Dans le cas non abélien, la classe de Chern fournit l'entier via

$$Q = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}(F \wedge F) \in \mathbb{Z},$$

où $F = dA + A \wedge A$. *Annotation* : Ce nombre d'enroulement est celui des instantons $SU(2)$ (nombre instantonique).

5 K-théorie, K-homologie et indice

Unitaires, projecteurs et winding

Un soliton défini par unitaire $u \in M_N(\mathcal{A})$ représente une classe $[u] \in K_1(\mathcal{A})$. La *forme de winding* en dimension $2n+1$ est la composante de la Chern character

$$\text{Ch}_{2n+1}(u) = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} \text{Tr}((u^{-1} du)^{2n+1}).$$

Le *pairing* avec la classe de K-homologie $[D_A]$ donne l'entier

$$Q = \langle \text{Ch}_{2n+1}(u), [D_A] \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Théorème de l'indice (avec A)

Pour l'opérateur adjoint $D_{A,u} = u^{-1} D_A u$, l'entier est l'indice

$$Q = (D_{A,u}^+) = \dim \ker D_{A,u}^+ - \dim \ker D_{A,u}^- \in \mathbb{Z}.$$

Annotation : La présence de $A(x)$ dans D_A assure que l'indice encode la géométrie de jauge (champ noétique) et le winding du soliton.

6 Courant topologique et conservation

Il existe un courant topologique j_{top}^μ tel que

$$\partial_\mu j_{\text{top}}^\mu = 0, \quad Q = \int d^d x j_{\text{top}}^0.$$

Annotation : La conservation est topologique : Q ne change que par des événements singuliers (création/annihilation soliton-anti-soliton).

7 Bornes d'énergie (BPS) et transport de charge

Dans les modèles Bogomolny, l'énergie est bornée par la charge :

$$E \geq c|Q|, \quad E_{\text{BPS}} = c|Q|.$$

Annotation : Le soliton *transporte* la charge car celle-ci est liée à une densité locale invariante qui accompagne sa dynamique et ses interactions.

8 Compatibilité avec l'action spectrale

L'action spectrale

$$S = (f(D_A/\Lambda)) + \frac{1}{2}\langle J\psi, D_A\psi \rangle$$

contient, via $a_4(D_A^2)$, les termes de jauge

$$\int \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \sqrt{g} d^4x,$$

qui fixent la dynamique des solitons porteurs de winding Q . Les couplages Chern–Simons/Chern–Pontryagin $\int \text{Tr}(F \wedge F)$ quantifient Q et relient directement la topologie de $A(x)$ à l'entier mesuré dans les pairings.

Conclusion

- La finitude d'énergie compactifie l'espace et transforme les configurations solitoniques en applications $S^d \rightarrow \mathcal{M}$, dont la classe d'homotopie est un entier Q .
- Avec le champ noétique $A(x)$, Q se lit comme flux ($U(1)$), degré (Skyrmion) ou nombre instantonique ($\int \text{Tr}(F \wedge F)$).
- En K-théorie/K-homologie, Q est le pairing $\langle \text{Ch}(u), [D_A] \rangle$ et *égal* à un indice de Fredholm d'un Dirac couplé, garantissant quantification et robustesse.
- Les bornes BPS et le courant topologique établissent la conservation et le transport physique de la charge par le soliton.

Ainsi, « chaque soliton transporte une charge topologique définie par un nombre d'enroulement » est normalisé, justifié et démontré dans le formalisme noétique avec inclusion explicite du champ $A(x)$.