

Raisonnement par l'absurde

Supposons que $\sqrt{2}$ s'exprime comme un nombre rationnel, il peut se mettre sous la forme « $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ » avec p et q deux entiers naturels et premiers entre eux (sans facteurs communs).

En élevant au carré, on a : $2q^2 = p^2$

Avec un peu d'attention, on remarque que dans ce cas, p est nécessairement pair. On peut donc l'exprimer comme $p = 2r$

d'où $2p^2 = 4r^2$ donc $q^2 = 2r^2$

Ainsi q est également un nombre pair. Si p et q sont pairs alors ils ont un facteur en commun (le nombre 2). Maintenant il faut remonter la problématique et relire la proposition initiale car si p et q ont un facteur commun, alors $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, c'est donc un nombre irrationnel.